Prof. OCTAVIAN MARICA

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ

ROVIMED PUBLISHERS

CUPRINS

I. Metode de rezolvare a problemelor de geometrie 7

1.1. Metode generale de rezolvare a problemelor de demonstraţie 7

1.1.1. Metoda sintezei 7

1.1.2. Metoda analizei 10

1.2. Metode particulare de rezolvare a problemelor de demonstraţie 13

1.2.1. Metoda reducerii la absurd 13

1.2.2. Metoda analitico-sintetică 16

II. Procedee specifice pentru rezolvarea problemelor de coliniaritate şi concurenţă 20

2.1. Probleme de coliniaritate 20

2.1.1. Inventar de procedee 20

2.1.2. Exemple 23

2.2. Probleme de concurenţă 29

2.2.1. Inventar de procedee 29

2.2.2. Exemple 32

III. Teoreme remarcabile şi probleme clasice de coliniaritate şi concurenţă 38

3.1. Teoreme şi probleme de coliniaritate 38

3.2. Teoreme şi probleme de concurenţă 59

IV. Metode vectoriale de demonstraţie a teoremelor fundamentale de coliniaritate şi concurenţă 80

4.1. Vectori în plan 80

4.1.1. Segmente orientate 80

4.1.2. Definiţia vectorilor 84

4.1.3. Adunarea vectorilor 85

4.1.4. Înmulţirea vectorilor cu numere reale 90

4.1.5. Vectori coliniari 91

4.1.6. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari 93

4.1.7. Punctul care împarte un segment orientat într-un raport dat 95
4.1.8. Condiţii vectoriale de coliniaritate 97
4.1.9. Produsul scalar a doi vectori 98
4.2. Teoreme fundamentale de concurenţă şi coliniaritate 104

V. Aspecte de ordin metodic 119
5.1. Problema didactică de matematică 119
5.2. Rolul problemelor în învăţarea matematicii 121
5.3. Probleme rezolvate de coliniaritate şi concurenţă 127
5.4. Exemplu de proiect didactic 150
5.5. Cercurile de matematică 157
5.6. Tipuri de itemi 176

I. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE GEOMETRIE

Metodă vine de la cuvântul grecesc *methodos* (*meta* = după, cu şi *odos* = cale, drum, care tradus înseamnă „cu calea” sau „după drumul”).

În matematică, prin metodă se înţelege calea raţională care trebuie urmată pentru a demonstra o teoremă sau pentru a rezolva o problemă.

În geometrie întâlnim numeroase şi variate probleme, însă, oricâte încercări s-ar face, nu este posibil să se găsească un singur mers raţional după care toate problemele s-ar putea rezolva, ci un grup mare de probleme se rezolvă într-un fel, alt grup în alt fel şi se găsesc multe asemenea căi de rezolvare a problemelor, deoarece multe şi variate sunt chestiunile teoretice pe baza cărora au fost formulate problemele ce aparţin diferitelor grupuri.

Cunoaşterea celor mai întâlnite metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie este necesară tuturor celor ce studiază această ştiinţă, deoarece, pe de o parte, îi fereşte de încercări făcute la întâmplare, pe de altă parte, le dezvoltă capacitatea de a generaliza, fapt ce le dă posibilitatea să lege între ele problemele ce se rezolvă după o anumită schemă de raţionament, care se reţine uşor şi se aplică fără greutate.

Metodele pentru rezolvarea problemelor se împart în două grupe principale, şi anume: generale şi particulare.

Sinteza şi analiza sunt singurele metode generale care se aplică în demonstrarea unui număr foarte mare de teoreme şi probleme. Aceasta însă, nu înseamnă că nu putem căuta şi folosi metode particulare, care să ne conducă la rezultat sub o formă mai uşoară şi frumoasă în cazul unui anumit grup de probleme. ([5], pag. 4)

1.1. METODE GENERALE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE DEMONSTRAŢIE

1.1.1. Metoda sintezei

Problemele de demonstraţie sunt probleme prin rezolvarea cărora se urmăreşte stabilirea sau verificarea unei relaţii, găsirea unor proprietăţi noi ale figurilor date sau, în general, să se justifice dacă o afirmaţie pe care am formulat-o mai înainte referitoare la o proprietate a unei figuri geometrice este adevărată sau nu.

Rezolvarea problemelor de demonstraţie ajută la însuşirea temeinică a cunoştinţelor de geometrie, la dezvoltarea gândirii logice, constituind în acelaşi timp primii paşi spre o muncă creatoare în acest domeniu.

Într-o problemă de demonstraţie la geometrie se consideră o figură $\mathcal{F}$, despre care se spune că posedă proprietăţile α, şi se cere să demonstrăm că în acest caz mai posedă şi proprietăţile β.

Propoziţia care afirmă că figura $\mathcal{F}$ posedă proprietăţile α, pe care o notăm cu A, poartă numele de ipoteză, iar propoziţia care afirmă că figura $\mathcal{F}$ posedă proprietăţile β şi pe care o notăm cu B, poartă numele de concluzie. Cu alte cuvinte, într-o problemă de demonstraţie se cere să arătăm că, dacă pentru o figură $\mathcal{F}$ este adevărată propoziţia A (ipoteza) este adevărată şi propoziţia B (concluzia).

La rezolvarea unei probleme de demonstraţie prin sinteză se procedează astfel. Se porneşte de la propoziţia A (ipoteză) şi se caută o altă propoziţie C, pe care o implică propoziţia A (care se poate deduce din propoziţia A).

Cu alte cuvinte, ţinând seama că figura $\mathcal{F}$ are proprietăţile α, căutăm să descoperim ce alte proprietăţi γ mai are, iar propoziţia care afirmă că figura $\mathcal{F}$ are proprietăţile γ o notăm cu C.

Căutăm mai departe o propoziţie D, pe care să o implice propoziţiile A şi C, şi aşa mai departe până când propoziţiile astfel găsite implică propoziţia B (concluzia). ([5], pag. 23)

Urmează ***exemple*** de felul cum se aplică ***metoda sintezei*** în demonstraţii.

1. (Teorema lui Menelaus). ([9], pag. 33) Fie un triunghi ABC şi trei puncte $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului. Dacă punctele A', B' şi C' sunt coliniare atunci are loc egalitatea

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Demonstraţie:

Analizând figura 1.01, observăm că ipoteza nu ne dă suficiente date pentru a pune în evidenţă relaţia cerută.

Fiind vorba despre rapoarte şi legăturile ce trebuie stabilite între ele, acestea constituie o indicaţie că noi trebuie să plecăm de la cunoştinţele referitoare la asemănarea triunghiurilor.

Proiectăm vârfurile triunghiului ABC pe dreapta determinată de cele trei puncte coliniare A', B', C'. Se obţin punctele A_1, B_1, C_1 $\left(A_1 = pr_{A'C'}A,\ B_1 = pr_{A'C'}B,\ C_1 = pr_{A'C'}C\right)$.

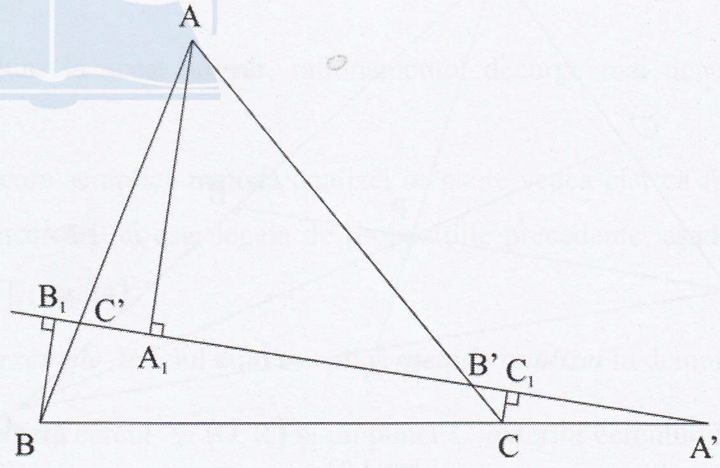

Fig. 1.01

Este uşor de observat că

$$\Delta A'BB_1 \sim \Delta A'CC_1,\quad \Delta B'CC_1 \sim \Delta B'AA_1,\quad \Delta C'AA_1 \sim \Delta C'BB_1.$$

Din triunghiurile asemenea formate, rezultă

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1},\quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1},\quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1}.$$

Înmulţind aceste trei egalităţi se obţine

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

2. (Teorema lui Ceva). $([4], \text{pag. } 44)$ Fie ABC un triunghi şi A', B', C' trei puncte astfel încât $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente atunci are loc egalitatea

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Demonstraţie:

Fie $\{P\} = AA' \cap BB' \cap CC'$. (Fig.1.02)

Faptul că în ipoteză se vorbeşte de şase segmente determinate de cele trei drepte concurente de pe laturile triunghiului dat este o indicaţie că în demonstraţia teoremei date putem să aplicăm teorema lui Menelaus.

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul BA'A şi punctele coliniare C, P, C'.

Rezultă

$$\frac{CB}{CA'} \cdot \frac{PA'}{PA} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

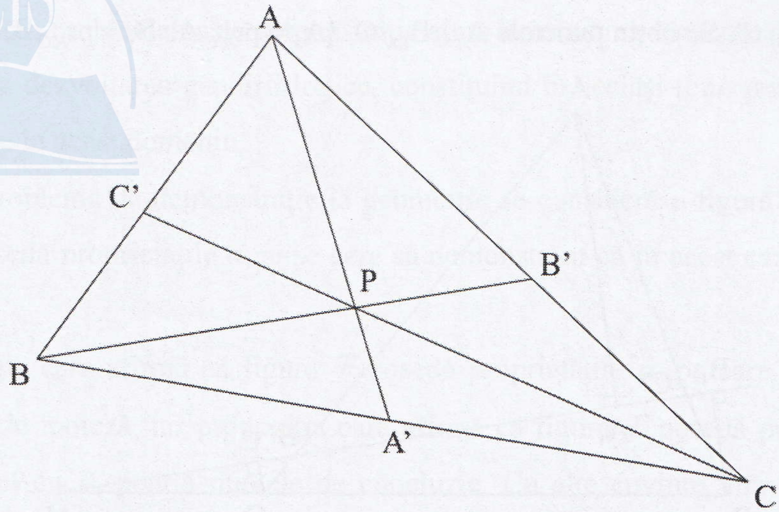

Fig. 1.02

Aplicăm acum teorema lui Menelaus pentru triunghiul CAA' şi punctele coliniare B', P, B. Rezultă

$$\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{PA}{PA'}\cdot\frac{BA'}{BC}=1.$$

Înmulţind ultimele două relaţii se obţine

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$$

1.1.2. Metoda analizei

La rezolvarea unei probleme prin analiză se porneşte de la concluzia *B* şi se caută o propoziţie *C* care să o implice pe *B*.

Căutăm o altă propoziţie *D* din care să o deducem pe *C*, apoi o propoziţie *E* din care să o deducem pe *D* şi aşa mai departe, până când reuşim să găsim o propoziţie *A* din care să putem deduce propoziţia precedentă.

Practic se procedează astfel:

a) Se presupune că propoziţia de demonstrat este adevărată.

b) Se pune următoarea întrebare:

De unde reiese imediat concluzia teoremei?

Răspunsul la această întrebare duce la formularea unei propoziţii mai puţin necunoscută decât cea dată de teoremă. Să numim această propoziţie, de exemplu, *C*.

c) O întrebare asemănătoare se pune şi pentru propoziţia *C*.

De unde reiese imediat concluzia propoziţiei *C* ?

Răspunsul la această întrebare duce la formularea unei noi propoziţii, mai puţin necunoscută decât *C*. Să numim această nouă propoziţie, de exemplu, *D*.

d) Acest proces se repetă până când se obţine o propoziţie cunoscută, stabilită mai înainte.

e) O dată ajuns la acest adevăr, raţionamentul decurge mai departe după metoda sintezei.

Din felul cum se aplică metoda analizei se poate vedea clar că fiecare etapă nu se desfăşoară prin încercări, ci este legată de propoziţiile precedente, aşadar raţionamentele sunt motivate. ([5], pag. 74)

Urmează ***exemple*** de felul cum se aplică ***metoda analizei*** în demonstraţii.

1. Se consideră cercul $\mathscr{C}(O, R)$ şi un punct C exterior cercului. Prin punctul C se duce secanta CBA şi tangenta CD la cercul dat. Pe cercul $\mathscr{C}(O_1, R_1)$ circumscris triunghiului CBD se consideră punctul E astfel încât $CD \equiv CE$. Să se arate că punctele A, D şi E sunt coliniare.

Demonstraţie:

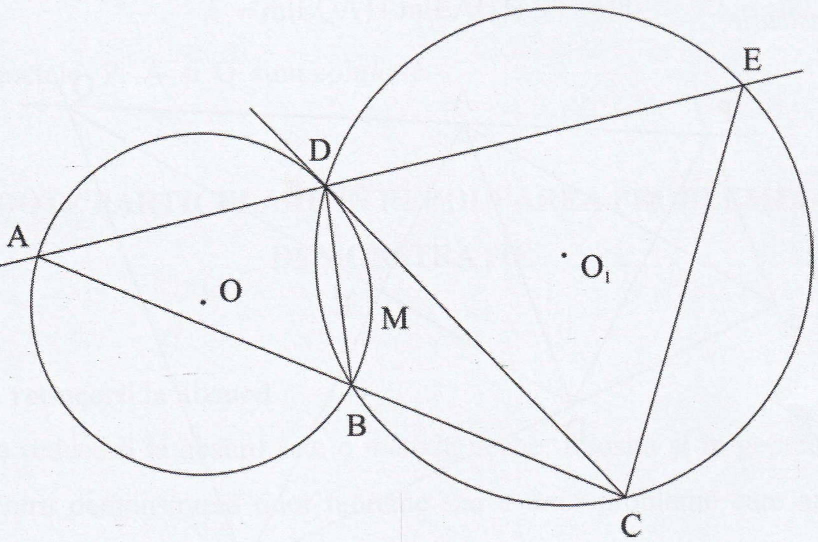

Fig.1.03

Presupunând că punctele A, D, E sunt coliniare avem $m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{EDC}) = 180^\circ$, $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEC})$ deoarece $CD \equiv CE$ şi

$$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ADB}) + \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{DMB}) =$$
$$= m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BAD}) =$$
$$= 180^\circ - m(\widehat{ABD}).$$

Comparând aceste relaţii obţinem $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{ABD})$, egalitate care este adevărată deoarece $m(\widehat{DEC}) = 180^\circ - m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ABD})$, patrulaterul $BDEC$ fiind inscriptibil.

5.3. PROBLEME REZOLVATE DE COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ

1. ([8], pag. 207) Fie paralelogramul ABCD şi punctele E, F astfel încât $B \in (AE)$, $BE \equiv AD$, $D \in (AF)$, $DF \equiv AB$. Să se arate că punctele E, C şi F sunt coliniare.

Rezolvare:

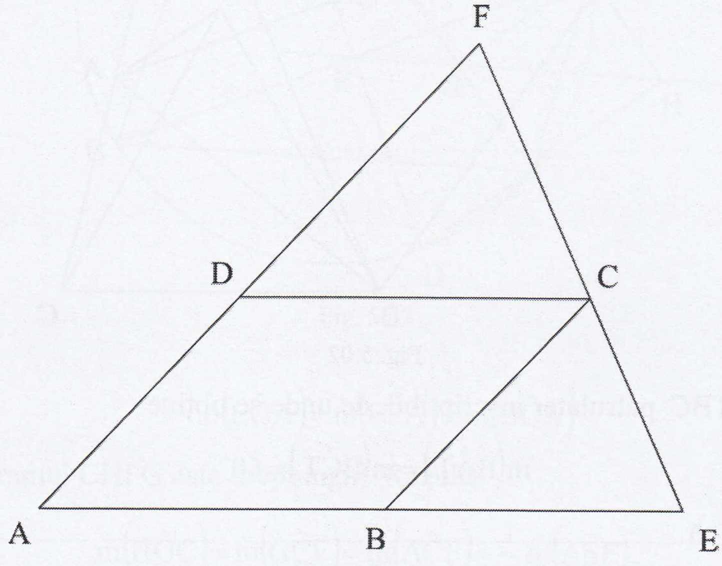

Fig. 5.01

Cum $BE \equiv AD$ şi $AD \equiv BC$ rezultă $BE \equiv BC$ deci triunghiul CDE este isoscel. Deoarece $DF \equiv AB$ şi $AB \equiv DC$ rezultă $DF \equiv DC$ aşadar triunghiul FDC este isoscel. Avem

$$m(E\hat{C}F) = m(E\hat{C}B) + m(B\hat{C}D) + m(D\hat{C}F) = \frac{180^\circ - m(C\hat{B}E)}{2} + m(B\hat{C}D) + \frac{180^\circ - m(F\hat{D}C)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[360^\circ + 2\,(B\hat{C}D) - m(C\hat{B}E) - m(F\hat{D}C)\right].$$

Întrucât $BC \parallel AD$ şi $AB \parallel DC$ se obţine

$$m(B\hat{C}D) = m(C\hat{B}E) = m(F\hat{D}C).$$

Rezultă $m(E\hat{C}F) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$, deci punctele E, C şi F sunt coliniare.

2. ([9], pag.169) Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 60^\circ$ şi triunghiul echilateral BCT astfel încât A şi T aparţin aceluiaşi semiplan delimitat de dreapta BC. Se iau punctele P şi Q aşa încât $A \in (CP)$, $(BP) \cap (AQ) \neq \varnothing$ şi triunghiul BPQ este echilateral. Să se arate că punctele A, T şi Q sunt coliniare.

Rezolvare:

Cum $m(B\hat{A}C) = 60^\circ$ şi triunghiul BCT este echilateral (Fig. 5.02), atunci

$$m(B\hat{A}C) = m(B\hat{T}C).$$

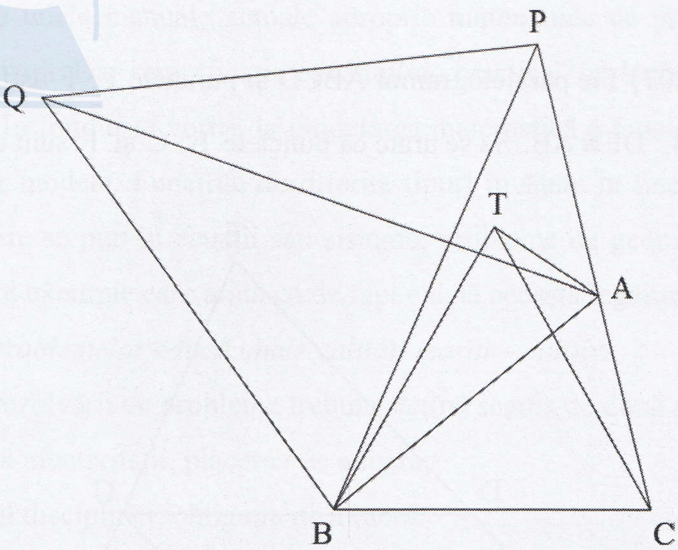

Fig. 5.02

Rezultă ATBC patrulater inscriptibil, de unde se obţine

$$m(B\hat{A}T) = m(B\hat{C}T) = 60^\circ.$$

Se observă că

$$m(B\hat{A}P) + m(B\hat{Q}P) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

de unde rezultă APQB patrulater inscriptibil.

Aşadar

$$m(B\hat{A}Q) = m(B\hat{P}Q) = 60^\circ.$$

Se obţine astfel

$$m(B\hat{A}T) = (B\hat{A}Q).$$

Deci

$$m(Q\hat{A}T) = m(B\hat{A}T) - m(B\hat{A}Q) = 0^\circ$$

şi prin urmare punctele A, T şi Q sunt coliniare.

3. ([9], pag.168) Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathscr{C}(O, R)$. Perpendiculara din B pe diametru [AD] intersectează dreapta [AD] în E, iar cercul $\mathscr{C}(O, R)$ în F. Paralele duse prin F la CD respectiv CA, intersectează CA respectiv CD, în G respectiv H. Să se demonstreze că puctele E, G şi H sunt coliniare.

Rezolvare:

Cum $FG \parallel CD$ şi $CD \perp AC$ rezultă $FG \perp AC$. Deoarece $m(A\hat{E}F) = m(A\hat{G}F) = 90^\circ$ atunci patrulaterul EGFA este inscriptibil (Fig. 5.03).

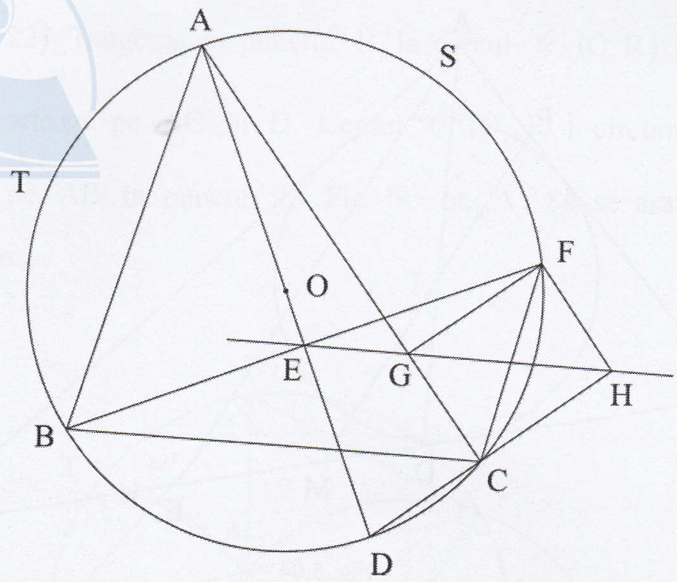

Fig. 5.03

Se obţine

$$m(E\hat{G}A)=m(E\hat{F}A)=m(B\hat{C}A) \qquad (1).$$

Paralelogramul CHFG este dreptunghi. Rezultă

$$m(H\hat{G}C)=m(G\hat{C}F)=m(A\hat{C}F)=\frac{1}{2}m(A\hat{S}F).$$

Dar $AE \perp BF$ şi $O \in (AE$, deci $m(A\hat{S}F)=m(A\hat{T}B)$.

Aşadar

$$m(H\hat{G}C)=\frac{1}{2}m(A\hat{S}F)=\frac{1}{2}m(A\hat{T}B)=m(B\hat{C}A) \qquad (2).$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă

$$m(E\hat{G}A)=m(H\hat{G}C)$$

deci punctele E, G şi H sunt coliniare.

- Observaţie: Cum $m(H\hat{G}C)=m(B\hat{C}A)$ atunci $EH \parallel BC$.

4. ([10], pag.13) Se consideră triunghiul $ABC\ (AC > AB)$, I centrul cercului înscris triunghiului şi punctele $E \in (BC)$ şi $F \in (AB)$, astfel încât perimetrele triunghiurilor ABE şi ACE sunt egale iar dreapta EF împarte triunghiul ABC în două suprafeţe de arii egale. Să se arate că punctele F, I şi mijlocul lui [BC] sunt coliniare.

Rezolvare:

Fie $BE = x$, $BC = a$, $AC = b$ şi $AB = c$ (Fig. 5.03). Cum $P[ABE] = P[ACE]$ avem

$$AE + x + c = AE + a - x + b$$

de unde se obţine $x = \dfrac{a+b-c}{2}$.

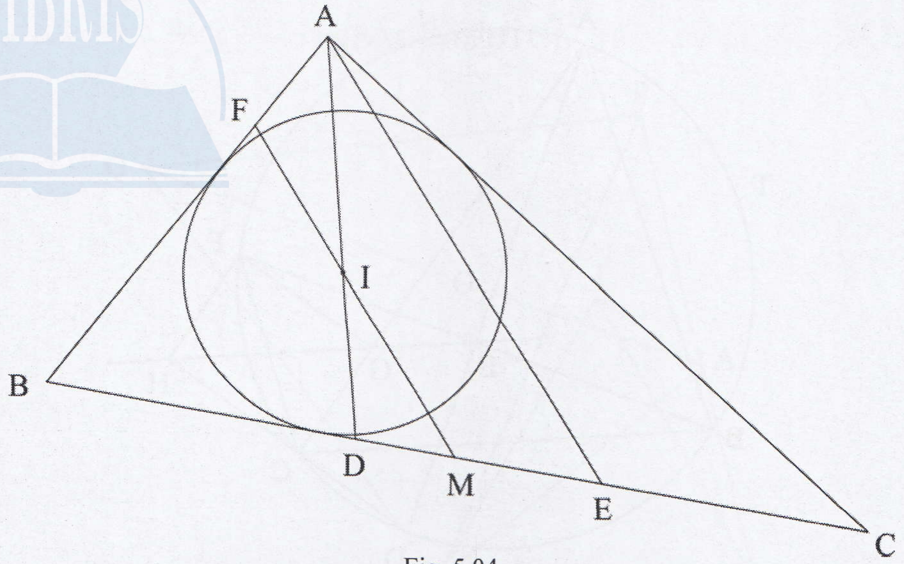

Fig. 5.04

Fie M mijlocul lui BC; atunci $ME = BE - BM = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$.

Fie $\{D\} = AI \cap BC$. Din teorema bisectoaei rezultă $BD = \frac{ac}{b+c}$. Atunci

$$DM = BM - BD = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}.$$

Rezultă

$$\frac{DM}{ME} = \frac{a}{b+c}.$$

Cum BI este bisectoarea unghiului B se obţine

$$\frac{\sigma[DBI]}{\sigma[ABI]} = \frac{d(B, AD) \cdot DI}{d(B, AD) \cdot IA} = \frac{BD \cdot BI \cdot \sin\frac{B}{2}}{AB \cdot BI \cdot \sin\frac{B}{2}}$$

de unde rezultă $\frac{DI}{IA} = \frac{a}{b+c} = \frac{DM}{ME}$. Aşadar $MI \parallel EA$.

Din ipoteză, condiţia impusă ariilor se reduce la $\frac{\sigma[BEF]}{\sigma[BCA]} = \frac{1}{2}$ deci

$\frac{BE \cdot BF \cdot \sin B}{BC \cdot BA \cdot \sin B} = \frac{1}{2}$ adică $BF = \frac{ac}{2BE} = \frac{ac}{a+b-c}$. Rezultă

$$\frac{BF}{BA} = \frac{a}{a+b-c}$$

şi cum $\frac{BM}{BE} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{a}{a+b-c}$ rezultă $\frac{BF}{BA} = \frac{BM}{BE}$. Aşadar $MF \parallel EA$.

Cum $MF \parallel EA$ şi $MI \parallel EA$ rezultă faptul că punctele M, I şi F sunt coliniare.